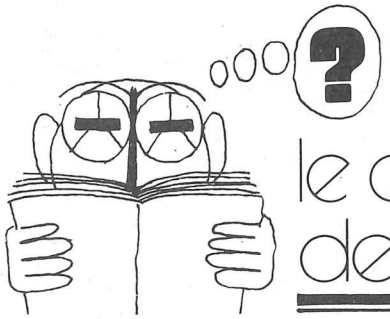

le casse-tête de l'électronicien

Rappel de l'énoncé du problème paru dans le N° 1534 de janvier 1976

Un pinceau complètement égoutté retient dans ses poils un volume de liquide v (qui dépend bien sûr de la taille du pinceau). On supposera ce volume v constant quelle que soit la nature du liquide.

On effectue un certain nombre n de rinçages en trempant le pinceau dans un volume v_o de diluant et en homogénéisant à chaque fois le mélange peinture-diluant (en remuant par exemple).

On dispose pour ceci d'une quantité V de diluant que l'on partage en n volumes égaux v_o pour faire ces n rinçages.

On souhaite qu'après le dernier rinçage, la quantité de peinture pure v_n retenue dans les poils soit égale ou inférieure à une fraction donnée de la quantité initiale v (Plus cette fraction est petite et mieux le pinceau est rincé).

1) Démontrer que pour arriver à ce résultat la quantité de diluant initiale V doit être supérieure ou égale à une valeur que l'on déterminera.

2) Calculer pour $v = 2\ cm^3$, $V = 100\ cm^3$ le nombre de rinçages à effectuer pour que

$$v_n \leqslant \frac{v}{10^6}$$

(le pinceau étant alors parfaitement nettoyé puisqu'il contiendra 1 million de fois moins de peinture qu'avant nettoyage).

SOLUTION

1) Rinçage 0 :

Le pinceau retient v peinture pure.

Rinçage 1 :

v peinture, v_o diluant } $(v_o + v)$ volume total

on sort le pinceau qui emporte v liquide (mélange peinture-diluant) ne contenant plus que v_1 peinture pure.

Déterminons v_1
dans $v_o + v$ mélange il y a v peinture
dans v mélange il y a v_1 peinture

$$v_1 = \frac{v^2}{v_o + v}$$

Rinçage 2 :

$(v_o + v)$ mélange contenant v_1 peinture pure apportée par le pinceau. On sort le pinceau qui emporte v du nouveau mélange et ne contient plus que v_2 peinture.

Déterminons v_2 (pour découvrir la loi de dilution)

$v_o + v \rightarrow v_1$ peinture pure
$v \rightarrow v_2$ peinture pure

$$v_2 = \frac{v\, v_1}{v_o + v}$$

et en remplaçant v_1 par la valeur précédente :

$$v_2 = \frac{v}{v_o + v} \cdot \frac{v^*}{v_o + v} = \frac{v^3}{(v_o+v)^2}$$

On démontre alors par récurrence :

Rinçage n :

$$v_n = \frac{v^{n+1}}{(v_o + v)^n} \qquad (1)$$

(quantité de peinture pure retenue par les poils, le reste $v-v_n$ étant du diluant qui s'évapore très bien).

On veut que v_n soit égal ou inférieur à une fraction de v, on écrit donc :

$$v_n \leqslant \frac{v}{k} \text{ (k choisi = Cste)}$$

en portant dans (1)

$$\frac{v^{n+1}}{(v_o + v)^n} \leqslant \frac{v}{k}$$

et en simplifiant par v

$$\frac{v^n}{(v_o + v)^n} \leqslant \frac{1}{k} \qquad (2)$$

L'énoncé dit que l'on partage le diluant en n part égales v_o donc $V = nv_o$
(2) devient :

$$\frac{v^n}{(\frac{V}{n} + v)^n} \leqslant \frac{1}{k} \qquad (3)$$

Il est alors judicieux de poser $V = \alpha v$. En effet, quels que soient les volumes v et V il est possible de trouver α pour que $V = \alpha v$.

Portons dans (3) :

$$\frac{v^n}{(\frac{\alpha v}{n} + v)^n} \leqslant \frac{1}{k}$$

$$\rightarrow \frac{v^n}{[v\,(\frac{\alpha}{n} + 1)]^n} \leqslant \frac{1}{k}$$

$$\rightarrow \frac{1\ v^n}{v^n\,(\frac{\alpha}{n} + 1)^n} \leqslant \frac{1}{k}$$

$$\rightarrow \frac{1}{(\frac{\alpha}{n} + 1)^n} \leqslant \frac{1}{k}$$

$$\left(\frac{\alpha}{n} + 1\right)^n \geqslant k \qquad (4)$$

Le nombre maximal de rinçage est l'∞, cherchons donc la limite de $(\frac{\alpha}{n} + 1)^n$ quand $n \rightarrow \infty$.

Posons :

$$(\frac{\alpha}{n} + 1)^n = y$$

$$\lim_{n\to\infty} \text{Log } y = \lim_{n\to\infty} n \text{ Log } (\frac{\alpha}{n} + 1)$$

Or si $n \rightarrow \infty$ $\quad \frac{\alpha}{n} \rightarrow 0$

$$\text{Log } \left(\frac{\alpha}{n} + 1\right) \sim \frac{\alpha}{n}$$

donc : $\lim_{n\to\infty} \text{Log } y = n\frac{\alpha}{n} = \alpha$

d'où $\lim_{n\to\infty} y = e^{\alpha}$

On a ainsi :

$$\left(V_n \frac{\alpha}{n} + 1\right)^n < e^{\alpha}$$

$n \in [0, \infty]$

et on veut

$$\left(\frac{\alpha}{n}+1\right)^n \geqslant k$$

dont il faut que : $e^\alpha > k$

Cherchons la signification de (5).
k est choisi et il faut :

$e^\alpha > k \quad \text{Log } e^\alpha > \text{Log } k \rightarrow \alpha > \text{Log } k$

et α représente :

$$\frac{V}{v} \text{ donc } \frac{V}{v} > \text{Log } k$$

$$V > v \text{ Log } k$$

La quantité de diluant doit être supérieure à v Log k.

2) **Application** : v = 2 cm³ V = 100 cm³ k = 10^6. Le problème est-il possible ?
V > v Log k → V > 2 x 2,303 x log 10^6 = 27,64 cm³
V > 27,64 cm³ : la condition est réalisée.

Calculons n :

$$y = \frac{\alpha}{n} + 1)^n \geqslant 10^6$$

$$\alpha = \frac{V}{v} = 50 \rightarrow \left(\frac{50}{n} +1\right)^n \geqslant 10^6$$

La seule méthode pour résoudre est le calcul numérique :

n = 1
$y = \left(\frac{50}{1} + 1\right)^1 = 51 < 10^6$

n = 2
$y = \left(\frac{50}{2} + 1\right)^2 = 676 < 10^6$

n = 3
$y = \left(\frac{50}{3} + 1\right)^3 = 5513{,}96 < 10^6$

n = 4
$y = \left(\frac{50}{4} + 1\right)^4 = 33215{,}06 < 10^6$

n = 5
$y = \left(\frac{50}{5} + 1\right)^5 = 161051{,}0 < 10^6$

n = 6
$y = \left(\frac{50}{6} + 1\right)^6 = 661029{,}22 < 10^6$

n = 7
$y = \left(\frac{50}{7} + 1\right)^7 = 2373764{,}92 > 10^6$

Il faudra alors faire 7 rinçages en utilisant à chaque fois
$\frac{100}{7}$ = 14,28 cm³ de diluant.

NOUVEAU PROBLÈME

Un glaçon est immergé dans un verre d'eau rempli à ras-bord. Lorsqu'il aura fondu, le niveau aura-t-il baissé, sera-t-il resté constant, ou aura-t-il débordé. Dans ce dernier cas, combien de cm³ auront quitté le verre ?

Densité de la glace : 0,9.
Volume du glaçon : 10 cm³.

Liste des lecteurs ayant correctement répondu au problème dont l'énoncé a paru dans le numéro 1528 de novembre 1975 :

MM. Charoy Alain (Montereau)
Mavrakis Daniel (Nice)
Valence (Montbrison)

Liste des lecteurs ayant correctement répondu au problème dont l'énoncé a paru dans le numéro 1532 de décembre 1975 :

M. Baran Michel (Chantelle)
Mlle Bodin Marie-Christine (St-Jean-de-Sauves)
MM. Borot Henri (Modane)
Bellenger Bruno (La Norville)
Brevet Rémy (St-Paul-de-Varax)
Brochot J.P. (Tremblay-les-Gonesse)
Buisson J.P. (Chalon-sur-Saône)
Charoy Alain (Montereau)
Corageoud (Annecy)
Delorme J.C. (Bron)
Desblet Marcel (Belbeuf)
Einsargueix Bernard (Epinay-sur-Seine)
Erisay Michel (St-Clair-sur-Epte)
Flament Gilbert (Cons-la-Grandville)
Mme Garcia (Rouen)
Garvey Jacques (Hauteville-Lompnes)
Gravelle P.J. (Beauvais)
Heurteaux Claude (Rouen)
Jay Ch. (Montbrison)
Lafforgue Fernand (Bazordan)
Leclerc Patrick (Beauvais)
Lesné J.M. (Mazingarbe)
Levinspuhl A. (Elancourt)
Mahaut J.C. (Attigny)
Moreau A. (Vaux-le-Penil)
Oury Michel (Presles)
Pallis Didier (Bernières-le-Potry)
Perez J.M. (Guipuzcoa, Espagne)
Pouget Xavier (Bonnemarie-Dontilly)
Prissette Ph. (Montpellier)
Quillaud Hervé (Paris)
Rommel J.L. (Reims)
Roques Pierre (Alzonne)
Roure Michel (Aubenas)
Sarrette Pierre (Brunoy)
Tetart Jacques (Ansauvillers)